Semana 10 Métodos Computacionales

2.

Para demostrar que ℙ es una medida de probabilidad, se deben verificar los axiomas de Kolmogorov:

Axioma 1: ℙ(Ω) = 1

Según la definición de ℙ, ℙ(A) = 1 si A = {1, 2}. Como Ω ={1,2}, ℙ(Ω) = 1.

Axioma 2: ∀ A ∈ ℱ, ℙ(A) ≥ 0

Según la definición de ℙ:

Si A = {∅}, ℙ(A) = 0, entonces ℙ (A) ≥ 0 y se cumple el axioma.

Si A = {A}, ℙ(A) = 1/3, entonces ℙ(A) ≥ 0 y se cumple el axioma.

Si A = {2}, ℙ(A) = 2/3, entonces ℙ(A) ≥ 0 y se cumple el axioma.

Si A = {1, 2}, ℙ(A) = 1, entonces ℙ(A) ≥ 0 y se cumple el axioma.

El axioma se cumple para todo A.

Axioma 3:

En este caso los conjuntos mutuamente excluyentes son:

Caso 1: = {∅} y = {1}

ℙ() = ℙ() = 1/3

ℙ() + ℙ() = 0 + 1/3 = 1/3

Como ℙ() = ℙ() + ℙ(), se cumple el axioma.

Caso 2: = {∅} y = {2}

ℙ() = ℙ() = 2/3

ℙ() + ℙ() = 0 + 2/3 = 2/3

Como ℙ() = ℙ() + ℙ(), se cumple el axioma.

Caso 3: = {∅} y = {1, 2}

ℙ() = ℙ() = 1

ℙ() + ℙ() = 0 + 1 = 1

Como ℙ() = ℙ() + ℙ(), se cumple el axioma.

Caso 4: = {∅}, = {1}, = {2}

ℙ() = ℙ() = 1

ℙ() + ℙ() + ℙ() = 0 + 1/3 + 2/3 = 1

Como ℙ() = ℙ() + ℙ() + ℙ(), se cumple el axioma.

Caso 5: = {1} y = {2}

ℙ() = ℙ() = 1

ℙ() + ℙ() = 1/3 + 2/3 = 1

Como ℙ() = ℙ() + ℙ(), se cumple el axioma.

El axioma se cumple para todos los casos.

Como todos los axiomas de Kolmogorov se cumplen, se concluye que ℙ es una medida de probabilidad.

3.

a) Por propiedades de conjuntos, = Ω.

Por la demostración del literal b): ℙ(Ω) = 1 - ℙ(∅).

Por el primer axioma de Kolmogorov: 1 = 1 - ℙ(∅), entonces ℙ(∅) = 0.

b) Por propiedades de conjuntos, A ∪ = Ω y A ∩ = ∅ (mutuamente excluyentes).

Por el tercer axioma de Kolmogorov: ℙ(A ∪ ) = ℙ(A) + ℙ(), entonces

ℙ(Ω) = ℙ(A) + ℙ().

Por el primer axioma de Kolmogorov: 1 = ℙ(A) + ℙ(), entonces ℙ() = 1 - ℙ(A).

c) Como A ∩ (B-A) = ∅ (son mutuamente excluyentes), entonces por el tercer axioma de Kolmogorov, ℙ(A) + ℙ(B-A) = ℙ(A ∪ (B-A)).

Por propiedades de conjuntos, ℙ(A) + ℙ(B-A) = ℙ(B).

d) Tomando la expresión del literal c):

ℙ(A) + ℙ(B-A) = ℙ(B).

Si B = Ω, entonces por el primer axioma de Kolmogorov: ℙ(A) = 1 - ℙ(B-A).

Supóngase que ℙ(A) > 1. En ese caso, ℙ(B-A) < 0, pero esto contradice el segundo axioma de Kolmogorov. Por reducción al absurdo, ℙ(A) ≤ 1.

e) Por la demostración del literal c): ℙ(B) = ℙ(A) + ℙ(B-A), entonces ℙ(B) - ℙ(A) = ℙ(B-A).

Por el segundo axioma de Kolmogorov: P(B-A) ≥ 0, entonces ℙ(B) - ℙ(A) ≥ 0, por lo que ℙ(B) ≥ ℙ(A).

f) El conjunto (A ∪ B) se puede escribir como A ∪ ( ∩ B), como ( ∩ B) y A son mutuamente excluyentes, por el tercer axioma de Kolmogorov:

ℙ(A ∪ B) = ℙ( ∩ B) + ℙ(A).

Por otro lado, el conjunto B se puede escribir como (A ∩ B) ∪ ( ∩ B).   
Como (A ∩ B) y ( ∩ B) son mutuamente excluyentes, por el tercer axioma:

ℙ(B) = ℙ(A ∩ B) + ℙ( ∩ B).

Substituyendo la segunda expresión en la primera:

ℙ(A ∪ B) = ℙ(A) + ℙ(B) - ℙ(A ∩ B).

g) Sea D = A U B [ℙ(A ∪ B) = ℙ(A) + ℙ(B) - ℙ(A ∩ B)]

Por f): P(D) = ℙ(A) + ℙ(B) - ℙ(A ∩ B).

ℙ(A ∪ B ∪ C) = P(D ∪ C)

Por f): P(D ∪ C) = ℙ(D) + ℙ(C) - ℙ(D ∩ C)

P(D ∪ C) = ℙ(A) + ℙ(B) - ℙ(A ∩ B) + ℙ(C) - ℙ(D ∩ C)

Sustituyendo D:

= ℙ(A) + ℙ(B) - ℙ(A ∩ B) + ℙ(C) - ℙ((A ∪ B) ∩ C)

Por la propiedad distributiva de la intersección sobre la unión de conjuntos:

= ℙ(A) + ℙ(B) - ℙ(A ∩ B) + ℙ(C) - ℙ((A ∩ C) ∪ (B ∩ C))

Usando f:

= ℙ(A) + ℙ(B) - ℙ(A ∩ B) + ℙ(C) - [ℙ(A ∩ C) + ℙ (B ∩ C) - ℙ((A ∩ C) ∩ (B ∩ C))]

= ℙ(A) + ℙ(B) + ℙ(C) - ℙ(A ∩ B) - ℙ(A ∩ C) - ℙ (B ∩ C) + ℙ(A ∩ B ∩ C)

Por lo anterior, se concluye que ℙ(A ∪ B ∪ C) = ℙ(A) + ℙ(B) + ℙ(C) - ℙ(A ∩ B) - ℙ(A ∩ C) - ℙ (B ∩ C) + ℙ(A ∩ B ∩ C).

h) Una expresión equivalente es:

ℙ(A-B) + ℙ(A ∩ B) = ℙ(A)

Operando el lado izquierdo de esta expresión:

ℙ(A-B) + ℙ(A ∩ B)

Como (A - B) = (A ∩ ):

=ℙ(A ∩ ) + ℙ(A ∩ B)

Como (A ∩ ) y (A ∩ B) son mutuamente excluyentes, por el tercer axioma de Kolmogorov:

= ℙ((A ∩ ) ∪ (A ∩ B))

Por propiedades de conjuntos, (A ∩ ) ∪ (A ∩ B) = A. Por lo que:

= ℙ(A)

Por lo anterior, se concluye que ℙ(A-B) = ℙ(A) - ℙ(A ∩ B).

i) Tómese el lado izquierdo de la expresión:

ℙ((A ∩ ) ∪ (B ∩ ))

Por propiedades de conjuntos, (A ∩ ) = (A - B) y (B ∩ ) = (B-A). Entonces,

= ℙ((A-B) ∪ (B-A))

Como (A-B) y (B-A) son mutuamente excluyentes, por el tercer axioma de Kolmogorov:

= ℙ(A-B) + ℙ(B-A)  
Usando el literal h):

= ℙ(A) - ℙ(A ∩ B) + ℙ(B) - ℙ(B ∩ A)

= ℙ(A) + ℙ(B) - 2ℙ(A ∩ B)

Por lo anterior, se concluye que ℙ((A ∩ ) ∪ (B ∩ )) = ℙ(A) + ℙ(B) - 2ℙ(A ∩ B).

5.

: al menos un celular sea defectuoso

: ningún celular es defectuoso

ℙ() = ℙ(primer celular no sea defectuoso) \* ℙ(segundo celular no sea defectuoso)   
\* ℙ(primer celular no sea defectuoso) \* ℙ(primer celular no sea defectuoso) \* ℙ(primer celular no sea defectuoso)

ℙ(primer celular no sea defectuoso) = 48/50 (hay dos defectuosos y aún no se ha probado ningún celular del total de 50)

ℙ(segundo celular no sea defectuoso) = 47/49 (hay dos defectuosos y ya se probó un celular del total de 50)

ℙ(tercer celular no sea defectuoso) = 46/48 (hay dos defectuosos y ya se probaron dos celulares del total de 50)

ℙ(cuarto celular no sea defectuoso) = 45/47 (hay dos defectuosos y ya se probaron tres celulares del total de 50)

ℙ(quinto celular no sea defectuoso) = 44/46 (hay dos defectuosos y ya se probaron cuatro celulares del total de 50)